ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: *09/ 06 /207*

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θεμα Α

Α1. Σχ. Βιβλίο σελ. 135

Α2. α. → Λ

β. Εστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλα δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

ενω $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

A3. Σχ. βιβλίο σελ. 73

A4. α → Λ

β → Σ

γ → Λ

δ → Σ

ε → Σ

Θέμα Β

$f(x)=\ln x \quad A=(0,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{x}{1-x} \quad B=\mathbb{R}-\{1\}$

B1 $\Gamma=\left\{\begin{array}{l} x\in B \\ g(x)\in A \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} x\neq 1. \\ \dfrac{x}{1-x}>0 \end{array}\right\}=$

$=\left\{\begin{array}{l} x\neq 1 \\ x(1-x)>0 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} x\neq 1 \\ x\in(0,1) \end{array}\right\}=(0,1)$

$f(g(x))=\ln(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$ με $x\in(0,1)$

B2 Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως

$h'(x)=\left[\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right]'=\dfrac{1}{\dfrac{x}{1-x}}\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=$

$$= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0$$

Άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως και 1-1 άρα ορίζεται η αντίστροφη..

Θέτουμε $h(x)=y \Leftrightarrow$

$$\ln\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = e^y(1-x) \Leftrightarrow e^y - x e^y = x \Leftrightarrow$$

$$x + e^y \cdot x = e^y \Leftrightarrow x(e^y+1) = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{e^y}{e^y+1},\ y \in \mathbb{R}.$$

$$x \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως έχουμε $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$

B3) $\varphi(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

$$\varphi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

Επομένως η φ είναι γν. αύξουσα

άρα <u>δεν</u> έχει ακρότατα

$$\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{e^x\cdot(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{(e^x+1)\cdot e^x\left[e^x+1-2e^x\right]}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow$$

$1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$\varphi''(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-e^x\geq 0 \Leftrightarrow$

$e^x\leq e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x\leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
φ	$\cup$		$\cap$

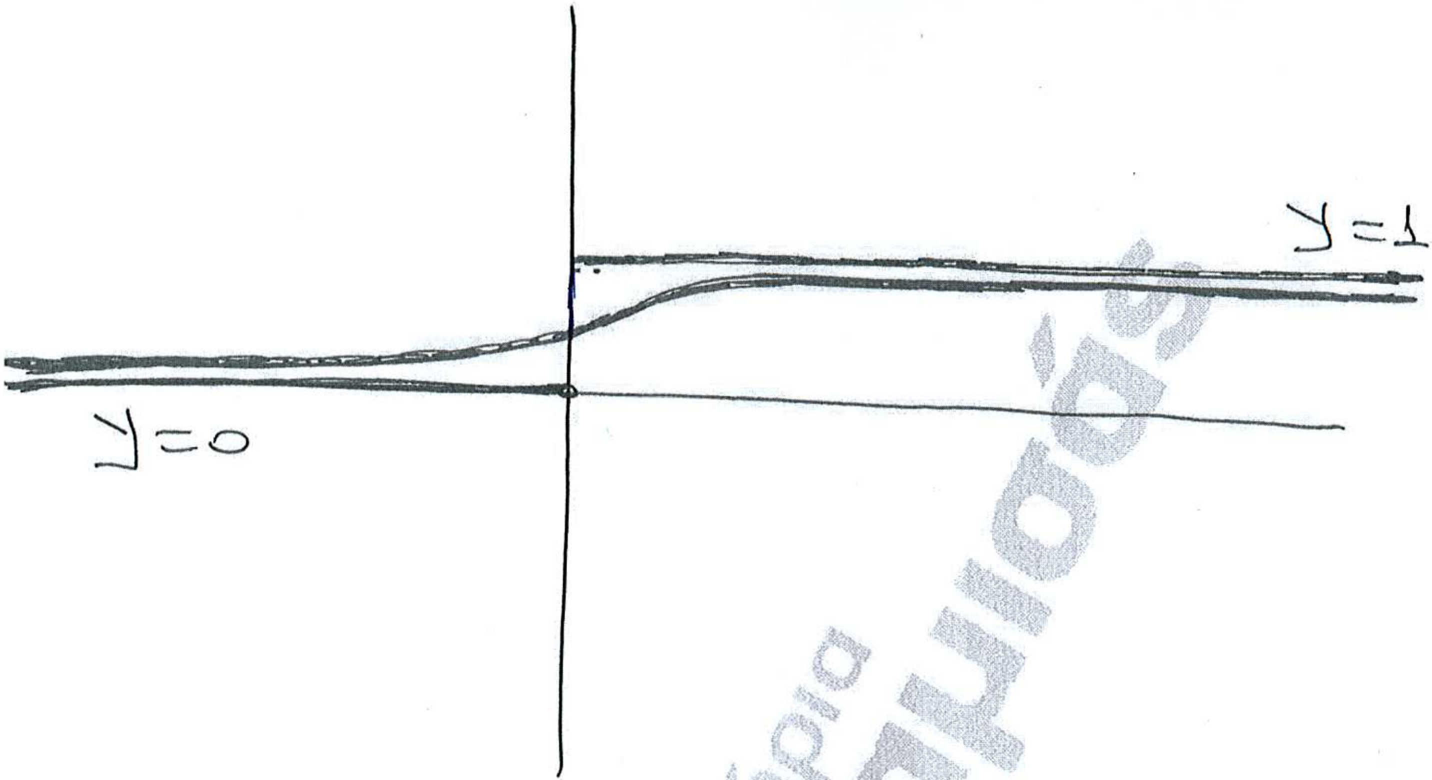
Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και
η φ " κοίλη στο $[0,+\infty)$

Η φ εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_0=0$
το $(0,\varphi(0))=(0,1/2)$

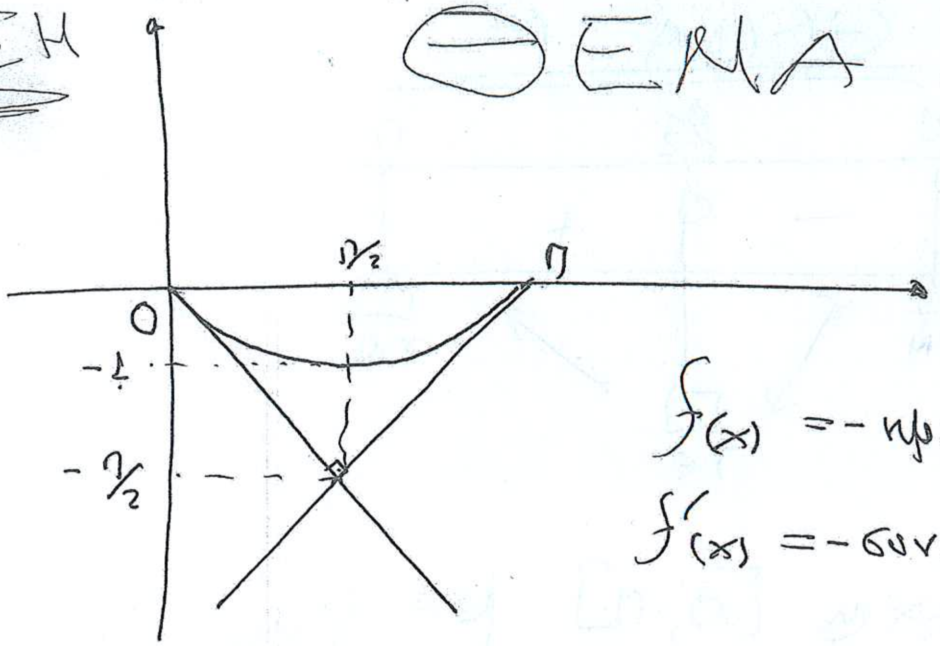
B4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\infty/\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

Επομένως οριζόντιες ασύμπτωτες είναι
η $y=0$ στο $-\infty$ και η $y=1$ στο $+\infty$


y=1
y=0

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑ Γ



$f(x) = -ημx, \ [0,π]$

$f'(x) = -συνx, \ [0,π]$

$\boxed{1}$ Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f στο οποίο δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από $A(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2})$

Εξίσωση εφαπτομένης: $(ε)\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$

$$(ε)\ y + ημx_0 = -συνx_0 \cdot (x - x_0)$$

$A(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}) \in (ε): \ -\frac{π}{2} + ημx_0 = -συνx_0 \left(\frac{π}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow$

$$-\frac{π}{2} + ημ\,x_0 = -\frac{π}{2}συνx_0 + x_0\,συνx_0 \Leftrightarrow$$

$$συνx_0\left(\frac{π}{2} - x_0\right) + ημx_0 - \frac{π}{2} = 0$$

Θεωρώ $g(x) = συνx \cdot \left(\frac{π}{2} - x\right) + ημx - \frac{π}{2}$

Είναι $g(0) = 0$ κ $g(π) = 0$

$$g'(x) = -ημx\left(\frac{π}{2} - x\right) - \cancel{συνx} + \cancel{συνx}$$

Για $x \in (0, \frac{π}{2})$ είναι $g'(x) < 0$

Για $x \in (\frac{π}{2}, π)$ είναι $g'(x) > 0$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑ Γ

x	0		$\pi/2$		π
g'		$-$	0	$+$	
g	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	ΤΜ

g συνεχής $[0,\pi]$ με $g_{max} = g(0) = g(\pi) = 0$

Άρα μοναδικές ρίζες $x=0$ κ $x=\pi$

Εξισώσεις εφαπτομένων:

$(\varepsilon_1)\ y = -x$ $\qquad$ $(\varepsilon_2)\ y = x - \pi$

$\boxed{2}$ Τομή $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $A\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = ημx > 0$ για $x \in (0,\pi)$ οπότε f κυρτή $[0,\pi]$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τις ε_1, ε_2 με εξαίρεση τα σημεία επαφής αντίστοιχα

Άρα $f(x) \geq -x \Leftrightarrow f(x) + x \geq 0$

κ $f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0$ για $x \in [0,\pi]$

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} (f(x) + x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (f(x) - x + \pi)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\eta\mu x + x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)\, dx$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{\pi^2}{8} - 1 + (-1) - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 0 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} -f(x)\, dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

Είναι $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \dfrac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$

3

$\boxed{3}$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{1}{f(x)-x+\pi}\,(f(x)+x)\right]=+\infty$$

διότι $\lim_{x\to\pi}(f(x)+x)=\pi$

και $f(x)-x+\pi>0$ για $x\in(0,\pi)$

$\lim_{x\to\pi}(f(x)-x+\pi)=0$ οπότε

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$$

$\boxed{4}$ Είναι $f(x)>x-\pi$, $x\in[1,e]$

από Γ_2 (το ίσον ισχύει μόνο για $x=\pi>e$)

οπότε $\frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x}$, $x\in[1,e]$

και $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Longrightarrow$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > \left[x-\pi\ln x\right]_1^e = e-\pi-(1-0) \Longrightarrow$$

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}\,dx>e-\pi-1$$